Alain Connes

Entretien

avec Anne Segal & Gérard Cartier

L'ensemble de l'entretien avec Alain Connes est écoutable sur la Sonothèque *ou à partir de l'icone. Cette retranscription (légèrement amendée) a été organisée en plusieurs chapitres pour en faciliter la lecture.*

AS : Alain Connes bonjour, et merci d'avoir accepté notre invitation pour le numéro 6 de la revue Secousse. On oppose souvent le monde des Nombres à celui des Lettres et plus globalement la Science à l'Art. Nous allons donc tenter de vous entraîner sur un terrain qui vous est peut-être moins familier que les Mathématiques... Vous êtes membre de l'Académie des sciences, Professeur au Collège de France, à l'Institut des Hautes Études Scientifiques et à l'Université de Vanderbilt aux États-Unis. Vous avez notamment reçu en 1982 la Médaille Fields, le Prix Crafoord en 2001 et la Médaille d'or du C.N.R.S. en 2004, sans compter de nombreuses distinctions.

Les mathématiques : un langage ?

GC : En préparant cet entretien, nous nous sommes posé une question : est-ce que les mathématiques relèvent du champ des sciences ? On a l'impression qu'il y a une grande liberté laissée à l'invention en mathématiques. Un théoricien de littérature allemand, Hugo Friedrich, disait (je cite) « que les formules mathématiques formaient un monde en elles-mêmes et ne jouaient qu'avec elles-mêmes » (in Structure de la poésie moderne*), ce qui, par opposition aux sciences, qui sont tournées vers le monde et qui ont pour ambition de déchiffrer le monde, marque une différence. Est-ce qu'on a raison de rattacher les mathématiques aux sciences ? Est-ce une question que les mathématiciens se posent ?*

AC : Il faut distinguer plusieurs aspects des mathématiques. Quand on ne connaît pas les mathématiques de l'intérieur, on peut essayer de les voir de l'extérieur comme un langage. Et ce qui est tout à fait extraordinaire c'est que c'est dans ce langage-là que sont écrites les lois de la Physique, et plus généralement celles de la Chimie, de la Biologie, etc. Ça c'est un phénomène extraordinaire, c'est qu'en fait, au fur et à mesure des grandes découvertes, on s'est aperçu que le vrai langage dans laquelle la Physique était décrite c'est les Mathématiques. Et pendant une longue période, il n'y a pas eu une distinction trop forte entre la Physique et les Mathématiques. C'étaient deux sciences qui étaient très voisines. C'est un aspect qui est extrêmement fort. Si par exemple on devait communiquer avec un monde différent du nôtre, dans un autre système planétaire, on se rend compte qu'on ne pourrait pas, bien sûr, communiquer avec un langage qu'on connaît, puisque tous les langages que l'on connait sont autoréférentiels : c'est-à-dire quand vous prenez un dictionnaire, que vous cherchez la signification d'un mot, cette signification n'est donnée que par référence à d'autres mots, qui eux-mêmes ne sont définis que par rapport à d'autres mots, et ainsi de suite. Eh bien, les Mathématiques, ce n'est pas pareil. Par exemple, lorsqu'on parle de *nombre entier*, on arrive à une notion universelle. On accède à quelque chose d'universel, et on accède, par raffinements successifs, à une entité qui est tellement pure, c'est une distillation de la pensée qui est tellement pure, qu'en fait, précisément, elle doit nous permettre de communiquer avec d'autres civilisations. On peut essayer (mais, heureusement, ce n'est pas ça) de réduire les Mathématiques à un langage – à un langage universel parce qu'il est parfaitement purifié. Ça a été essayé, d'ailleurs: il y a un langage qui a été créé, qui s'appelle le Lincos, et qui avait pour but, justement, de reconstruire le réel à partir de ce langage purifié.

Mais en fait, c'est une erreur de vouloir réduire les mathématiques à un langage, parce que justement, quand on fait des mathématiques, on s'aperçoit d'une chose qui est miraculeuse, c'est que c'est l'inverse de ce que l'on pense. C'est-à-dire que le pouvoir explicatif des mathématiques dans le réel, dans la réalité de la physique, est tel qu'au bout d'un moment, on a vraiment l'impression qu'au lieu que les mathématiques soient justement une création de l'esprit humain, autoréférentielle, c'est l'inverse qui se produit : c'est-à-dire qu'on peut arriver à situer la physique à l'intérieur des mathématiques… et le monde réel, presqu'à l'intérieur des mathématiques. On parlait tout à l'heure de nombres ; mais les mathématiques c'est quelque chose d'infiniment plus complexe, d'infiniment plus riche, c'est un peu comme *Alice au pays des merveilles* ! Il y a une partie des mathématiques qui a effectivement émergé du monde réel, de la physique. Mais lorsqu'on se pose les bonnes questions, et lorsqu'on suit une trajectoire qui est assez naturelle, on est un peu comme Alice au pays des merveilles : on ouvre des portes sur des mondes *qui ne sont pas des mondes connectés au monde physique*, qui sont des mondes *merveilleux*. Et qui sont merveilleux non pas seulement par leur propre cohérence interne, mais par les surprises qu'ils nous réservent, et par la *résistance* qu'ils ont. Exactement comme la réalité extérieure qui résiste (et qui donc nous répond quand on lui pose des questions), le monde mathématique a cette qualité extraordinaire, qu'on n'a pas, justement, contrairement à ce qui a été dit avant, on n'a pas cette liberté. On a une liberté pour créer des instruments de pensée qui nous permettent de voir le monde mathématique, mais le monde mathématique, lui, il est parfaitement résistant. Les mathématiciens *explorent un territoire*, ils ne le créent pas. Ils créent des instruments, pour y voir dans ce monde-là : c'est un monde qu'ils découvrent. Il est présent et on ne peut pas le modifier : il est tel qu'il est.

GC : On peut l'inventer...

AC : Non. On peut inventer des *instruments* pour le comprendre, des instruments de pensée. Si vous voulez, la distinction entre invention et découverte est très claire là. Personne ne va dire que les premiers qui ont trouvé la structure en double hélice de l'ADN l'ont inventée : ils l'ont découverte. Pour ça, ils avaient un instrument, qui était le microscope électronique. En mathématiques, c'est exactement pareil. Il y a des structures, il y a des propriétés des entiers qui sont là, qui sont présentes. On ne sait pas toujours les montrer : on peut poser la question, mais ensuite, la propriété est vraie ou pas. On peut inventer des concepts, bien sûr. Et l'une des activités principales du mathématicien, qui est assez méconnue, c'est la possibilité, au bout d'un moment, après beaucoup d'efforts pour résoudre des problèmes, d'arriver à distiller un concept, et un concept nouveau, et un concept qui, un jour, s'appliquera au quotidien...

GC : Peut-être…

AC : Peut-être. Mais ce qui est très important surtout de comprendre c'est que dans le travail du mathématicien il y a ce moment privilégié qui consiste justement à trouver un nouveau concept. Et un concept dont la force est exactement la force d'un nouveau mot dans le langage : ça contient quelque chose, mais la force d'un concept mathématique c'est qu'il est précis ; il a un contenu extrêmement précis qui n'est plus autoréférentiel.

Mathématiques et Poésie

AS : Sachant que j'allais vous rencontrer, un ami m'a mis entre les mains le discours qu'avait prononcé Saint-John Perse lors de la remise de son prix Nobel, et dans ce discours il tente de réconcilier la poésie et la science. Il dit : « Toute création de l'esprit est d'abord « poétique » au sens propre du mot ; et dans l'équivalence des formes sensibles et spirituelles, une même fonction s'exerce, initialement, pour l'entreprise du savant et pour celle du poète ». *Et il parle plus loin de* « la nuit originelle où tâtonnent deux aveugles-nés, l'un équipé de l'outillage scientifique, l'autre assisté des seules fulgurations de l'intuition ». *Pensez-vous que l'on puisse concilier la « pensée discursive » et « l'ellipse poétique », pour reprendre les termes de Saint-John Perse?*

AC : En fait, c'est assez complexe et je vais essayer d'expliquer en quel sens, effectivement, il y a un point commun qui est extrêmement fort. La démarche standard du mathématicien c'est la démarche qui consiste à partir d'un problème bien posé. Le problème, lui, il ne va pas l'inventer : il y a un problème qui existe, qui est bien posé. Si le problème est très étranger aux choses qu'il connait, ça ne va pas l'intéresser et il va faire autre chose. Par contre, ce qui peut arriver, c'est que le problème en question évoque en lui quelque chose qu'il connait sous une forme analogue. À ce moment-là, ce qui va se produire c'est une espèce de *mise en route*, c'est une mise en mouvement : et ce qui va se mettre en mouvement, ce n'est pas à proprement parler une démarche rationnelle. On peut parler d'intuition, mais c'est quelque chose de très vague. C'est un mouvement de pensée et, au début, ce mouvement de pensée est tellement fragile, tellement vulnérable que si on essayait d'en parler à des collègues, ils vous diraient tout de suite : *Oui, mais qu'est-ce que vous démontrez* ? Il est tellement vulnérable qu'il faut essayer de le protéger, de telle sorte qu'il puisse lentement mûrir, se développer et acquérir suffisamment de force pour qu'il puisse rentrer en contact avec les autres. Dans cette période, extrêmement délicate, je pense qu'il y a quelque chose de commun, sans doute, avec ce qui peut, au départ, motiver le poète pour vouloir aller dans telle ou telle direction : il y a là quelque chose qui est la *mise en mouvement*. Et ce qui est extraordinaire dans certaines idées mathématiques, c'est que ce sont des idées qui malgré leur âge objectif, c'est-à-dire le moment depuis lequel elles ont été créées, continuent à avoir cette puissance de mise en mouvement, puissance évocatrice qui est telle qu'elle met en mouvement.

Il est évident que certaines poésies ont cette force. Certains textes poétiques ont exactement la même propriété. Il y a un miracle qui se produit, qui est que quand on les lit, il y a une mise en mouvement de la pensée. Alors bien sûr, ça peut être une mise en mouvement émotionnelle, mais c'est beaucoup moins intéressant pour un mathématicien ; ça peut être une mise en mouvement cosmique et là, c'est vraiment intéressant pour un mathématicien. Il y a là quelque chose de très analogue et qui va tout à fait dans le sens du texte de Saint-John Perse : au départ, on est dans l'obscurité, à tâtons, mais l'on sait qu'il y a quelque chose. Si, par contre, on devait convaincre son voisin qu'il y a quelque chose, ce serait beaucoup plus difficile, et pour cela il faut arriver à *démontrer*. La pire injure que l'on puisse faire à un mathématicien c'est de lui dire qu'il est un poète : parce que justement, à un moment donné, il doit rendre des comptes, il doit démontrer quelque chose. Il y a un mathématicien célèbre, qui est Grothendieck, qui a fait la distinction entre deux manières de faire des mathématiques : la manière yang (male) et la manière yin (femelle). Il y a une manière qui consiste à dire : je veux démontrer tel résultat, et si je n'y arrive pas, c'est tout. Et il y a une autre manière qui est beaucoup plus créatrice et qui consiste justement à développer des idées, à développer une théorie. Ces deux manières sont complémentaires. C'est la deuxième manière, celle qui consiste à développer une théorie, à essayer d'explorer un territoire nouveau, sans nécessairement avoir en tête un problème spécifique à résoudre, qui est proche de la poésie.

Les images mentales

GC : En fait, vous avez presque répondu à la question que je voulais vous poser, qui était sur le processus de création en mathématiques. J'ai été frappé, en écoutant par exemple Jean-Pierre Bourguignon (à l'exposition de la Fondation Cartier) qui suggérait que la logique n'était pas à la source du processus de création en mathématiques, qu'il y a une sorte d'intuition, qui se rapproche de l'inspiration en poésie. C'est ce que vous venez de dire. Donc je reformule ma question : quel est le rôle de la logique ?

AC : En fait, c'est beaucoup plus complexe qu'il n'y paraît. C'est beaucoup plus une question de nuances entre les *connaissances* et *l'acte*. Dans un sujet qu'on explore, on peut très bien avoir énormément de connaissances, avoir accumulé un nombre incalculable de connaissances, et pourtant ne pas être capable d'avancer. C'est un peu comme si on demandait à un non-mathématicien de regarder une feuille de mathématique, ou à un non-musicien de regarder une partition : il verrait un certain nombre de symboles, et puis c'est tout. Pour un mathématicien, il y a une nuance absolument considérable entre être capable de redire un énoncé que l'on connait et l'avoir vraiment compris. Avoir compris un énoncé ne peut se faire vraiment que si on a cherché soi-même à le démontrer, sans regarder la démonstration, si on a séché sur cette démonstration suffisamment longtemps. Parce qu'il y a un processus mental qui se produit à ce moment-là : soit on trouve la démonstration, soit on finit par regarder dans le bouquin, mais à partir de ce moment-là, *l'image mentale se crée* et l'objet mathématique existe dans le cerveau. Il se met à exister et il se met à être vivant, c'est-à-dire qu'il se met à interagir avec les autres. S'il y a des analogies, elles se feront... Et ce qu'il me semble, c'est que la supériorité du poète sur le littéraire ordinaire c'est précisément cela : pour moi, le poète est celui qui a été capable de faire en sorte que certains mots aient une existence propre ; et une fois qu'ils ont acquis leur existence propre, ils se mettent à interagir entre eux, à former des combinaisons, et certaines combinaisons sont tellement éclatantes, qu'à ce moment-là on s'arrête, et on écrit. En mathématiques, c'est pareil. Il y a cette distance incroyable entre la connaissance à un niveau répétitif, à un niveau extérieur, et la connaissance intérieure. Et la connaissance intérieure, c'est ça qui fait la différence. On peut parler d'images mentales. Quand on a compris un concept mathématique, quand on a compris certaines notions, elles finissent par exister en tant qu'images mentales. Mais elles n'existent pas par la répétition de la lecture, elles n'existent que par l'action, et ça c'est extrêmement fort.

Il y a une autre analogie entre la poésie et les mathématiques. Il m'est arrivé d'écouter lire un poème, en l'occurrence c'était *Le Passeur* d'Yves Bonnefoy, et c'était comme si c'était la première fois que j'écoutais ce poème, car c'était tellement bien lu que c'était une révélation. Quand vous allez écouter un récital de piano, vous savez si le musicien est présent, s'il est là, ou s'il pense à autre chose. Vous savez tout de suite, pourtant il joue les mêmes notes, ça peut être un très grand artiste, ça peut être un pianiste virtuose mais vous pouvez tout de suite dire s'il est là où pas. Et en mathématiques, c'est pareil, vous pouvez exactement, en quelques secondes, savoir si la personne qui est présente a l'image mentale des concepts dont elle parle. C'est quelque chose qui transpire tout de suite.

AS : En fait, vous savez répondu également à une question que je voulais vous poser. J'ai écouté sur internet un petit entretien que vous aviez eu. Vous disiez : « Pour un mathématicien, pour comprendre un livre, il ne faut pas qu'il le lise, c'est la pire des erreurs. Il faut qu'il le lise à l'envers : voir l'énoncé d'un théorème, et se créer sa propre image mentale, qui va faire la démonstration. Il faut être actif et non lire passivement la démonstration ».

AC : Absolument. Je crois que j'ai répondu à ça. Si vous voulez que je sois plus explicite… Supposez que vous lisiez la démonstration : vous pouvez vérifier que c'est correct. Mais si vous avez essayé de trouver vous-même la solution, vous allez lire la démonstration et vous allez dire : ça, ça compte pas, ça compte pas… Là, vous allez dire, c'est là qu'il se passe quelque chose : dans toute cette démonstration, qui apparemment sera très longue, vous allez isoler trois lignes. Et vous savez que c'est dans ces trois lignes que tout est fait. Et ça, c'est une différence colossale. La démonstration au lieu d'être cette longue liste de déductions, dans votre cerveau elle sera zippée. C'est là que se manifeste un phénomène qui est extrêmement important en mathématiques, c'est les niveaux de hiérarchie successifs. Si on lit Descartes, par exemple, il n'avait pas vraiment les nombres négatifs ; ce n'était pas commun à l'époque, il les utilisait, mais ça n'était pas commun. Donc on voit qu'il y avait tout un fouillis de choses qui paraissent inextricables : tout ça, ça a été complètement zippé, ça a été complètement compris et c'est devenu extrêmement simple. Donc il y a ce processus qui est extrêmement important, qui fait qu'on arrive à une complexité considérable, mais après avoir simplifié. On ne peut le faire que lorsqu'on a vraiment compris les démonstrations de façon interne. Sinon, le cerveau ne fera pas le travail de compression totale de cette information, il ne sera pas capable de le faire.

AS : Ce qui m'a intéressée, et qui me paraissait alors complètement abstrait, c'est quand vous parlez d'image, d'image mentale : j'ai du mal à l'imaginer...

AC : Bien sûr. Pour vous donner un exemple, ce que les mathématiciens ont découvert c'est qu'à côté du monde réel (justement ce que l'on appelle les nombres réels ou complexes, etc.), il y avait pour chaque nombre premier un nombre qu'on appelle le *monde péadique*. Ce monde péadique c'est un monde merveilleux. C'est aussi beau, aussi cohérent, aussi magnifique que le monde réel. Bien sûr, si on voulait le décrire, on serait obligé de prendre des métaphores. Mais ces métaphores n'auraient de sens pour quelqu'un, que si cette personne avait fait le travail *actif* d'essayer de comprendre ces nombres ; sinon ça n'a pas de sens.

GC : On s'en fait une représentation, qui peut être différente d'un individu à un autre ? Les relations entre les objets sont les mêmes, quel que soit le mathématicien, mais la représentation...

AC : Bien sûr. Quand je dis *image mentale*, ce n'est pas vraiment une image, c'est une représentation mentale. Cette représentation mentale est sans doute aussi forte et aussi active que sont les mots dans sa langue maternelle pour le poète. Je pense. Je pense que ça a la même force.

La recherche du sens

GC : Pour continuer dans l'idée que les mathématiques sont l'un des Beaux-arts, je voulais citer certains mathématiciens qui, justement ont été enregistrés, sous forme de vidéos, dans l'exposition à la Fondation Cartier, qui parlent autant, sinon plus, de beauté que de vérité. D'où ma question : Qu'est-ce qui fait la beauté d'une démonstration ? La beauté n'est pas un critère de vérité : y a-t-il eu aussi, en mathématiques, de beaux mensonges – des démonstrations belles mais erronées ?

AC : Oui bien sûr, ça peut exister. Je ne pense pas que *beauté* soit le bon critère. Et même pour la poésie, je ne parlerais pas de beauté, je parlerais de *sens*. C'est la chose la plus difficile à définir. À mon avis le problème de définir le sens est un problème beaucoup plus important que de savoir si on fait de la découverte ou de la création en mathématiques. En mathématiques, on se retrouve souvent dans des situations dans lesquelles on est suffisamment immergé dans un problème pour savoir que telle chose a du sens. Mais c'est une chose qui est difficile à transmettre. Ce n'est pas complètement indépendant de la notion de beauté. Vous pourriez dire bien sûr qu'une démonstration très simple est une démonstration qui est belle.

GC : C'est ce que disent...

AC : Oui, bien sûr. Mais c'est extrêmement subjectif et je pense qu'il y a une notion plus importante c'est la notion de sens. Imaginez qu'on ait fabriqué un ordinateur qui soit capable (les ordinateurs sont capables de faire ça) de faire des déductions logiques, à partir d'axiomes par exemple. Cet ordinateur nous produirait quantité de théorèmes. Mais il est complètement évident pour un mathématicien que 99,9999999 % de ces théorèmes n'auraient aucun intérêt.

GC : Seraient inutiles ?

AC : N'auraient pas de sens. Ce n'est pas qu'ils ne seraient pas beaux, ils pourraient même être beaux, mais ils seraient futiles. Et ça, c'est une chose qui est extrêmement difficile à définir. C'est une chose extrêmement difficile à définir... En poésie, il y a une des qualités extraordinaires de certains poètes, c'est qu'à partir d'une expérience particulière, une expérience individuelle, ils arrivent à atteindre des choses qui sont universelles. Et c'est une chose très difficile à faire. Et en mathématiques, on a exactement cette difficulté-là, qui est qu'on essaie d'atteindre des énoncés qui soient suffisamment universels, suffisamment forts par leur sens, pour être convaincants pour tout le monde. On peut définir ce qui est vrai, ce qui est faux, quoique… on pourrait rentrer dans le théorème de Gödel, mais j'en ai tellement parlé… Mais la chose vraiment importante c'est de comprendre pourquoi certaines choses ont du sens et tellement d'autres n'en ont pas.

Le dialogue avec les autres disciplines

AS : Dans votre bibliographie, outre les livres qui rendent compte de vos recherches, on remarque deux livres d'entretiens, qui sont édités chez Odile Jacob : l'un, Matière à pensée, *avec un biologiste ; l'autre,* Triangle de pensées, *avec un philosophe et un physicien. Est-ce pour vous une nécessité de vous confronter à d'autres disciplines ?*

AC : Non en fait, ça s'est passé très différemment. Jean-Pierre Changeux m'a pris plus ou moins comme un cobaye. Il savait que j'étais mathématicien. On a beaucoup discuté et on n'a pas beaucoup évolué chacun de notre point de vue. Une fois que j'ai eu écrit le livre avec Changeux, je me suis aperçu que je n'avais pas pu dire certaines choses, en particulier, justement, sur le théorème de Gödel. Et du coup, on a fait cet autre dialogue avec Lichnerowicz et Schutzenberger : mais par accident si vous voulez, ça ne suivait pas une démarche à laquelle j'avais pensé avant. Parce que je ne suis pas philosophe.

GC : En deux mots ce théorème de Gödel, le théorème d'incomplétude, vous pouvez nous en dire plus ?

AC : Oui. La nuance qu'il y a entre ce que j'appelle la réalité mathématique *archaïque*, c'est-à-dire immuable, et la manière dont on essaie de la comprendre, c'est la même nuance qu'il y a entre la réalité extérieure et le tribunal. Au tribunal vous avez un certain nombre de pièces à conviction, etc., et à partir de ces pièces à conviction vous pouvez faire un certain nombre de déductions logiques. Le rapport entre ces déductions logiques et la réalité extérieure n'est évidemment pas un rapport simple, c'est un rapport qui est très subtil. Et c'est exactement pareil entre le travail du mathématicien et la réalité mathématique archaïque. Je l'ai discuté en grand détail dans le deuxième livre, *Triangle de pensées ;* il ne faut pas trop insister dessus, parce que dans le travail *courant* du mathématicien, ces problèmes-là ne se posent pas. Par contre, si l'on cherche au niveau philosophique, là, effectivement, on peut en discuter longtemps.

GC : On va continuer peut-être à parler de littérature. Quel est votre rapport à la littérature et pensez-vous qu'une confrontation avec des disciplines artistiques puisse être profitable dans votre activité professionnelle ?

AC : Ça c'est très difficile, parce que pour moi la littérature, c'est beaucoup plus une manière de souffler...qu'une partie de mon travail, heureusement !

GC : Mais le cerveau ne s'arrête pas de fonctionner ?

AC : Non, il ne s'arrête pas de fonctionner. À un moment donné, j'étais passionné par le dessin : c'était dans les années 90 et je suivais de manière assez assidue un cours de dessin dans lequel il fallait dessiner vite. Je me souviens qu'une nuit, je n'avais pas dormi à essayer d'améliorer un dessin que j'avais fait, et je m'étais aperçu que la partie du cerveau qui fonctionnait était orthogonale à la partie qui fait des mathématiques, et le matin, au lieu d'être fatigué, j'étais dans une forme extraordinaire. Il y avait toute une partie différente du cerveau qui s'était mis en route et qui en fait m'avait libéré beaucoup plus que de me fatiguer. Ça m'avait énormément frappé. On parlait de liberté tout à l'heure... La liberté que vous avez, elle est infime, dans les mathématiques. C'est évident que, dans les autres arts, il y a une marge de manœuvre qui est bien plus grande et il y a une expression de l'être charnel plus directe que dans les mathématiques.

AS : Alain Connes, merci beaucoup.